https://gospodarkainnowacje.pl
GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 32 | 2023
Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

О ГЛОБАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОРОДНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Б. Хусанов

Доцент кафедры «Высшая математика» Самаркандский Государственный архитектурно строительный Университет

Кулмирзаева Гулрабо Абдуганиевна

Старшая преподавательница кафедры «Высшая математика» Самаркандский Государственный архитектурно строительный Университет, Uzbekistan

A R T I C L E I N F O.

Ключевые слова: глобальном Исследовании.

Аннотация

В настоящей статье изучаем поведение траекторий системы трёх дифференциальных уравнений, правые части которых являются формами

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = X^m(x), \;\; x = (x_1, x_2, x_3), \; (1)$$

где $x_i^m(x)$ – полиномы степени m≥ 1 , с постоянными коэффициентами, i=$\overline{1,3}$

Переход из x – пространстве b(u_1, u_2, x_3) - пространство осуществим при помощи соотношений [1]

$$\text{Пусть } x_i = u_i x_3, \quad i = 1,2 \; (2)$$

Тогда для определения $u_i(t)$ и $x_3(t)$ имеем следушую систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= x_3^{m-1} u_i(t) \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3^m X_3^m(u,1) \end{aligned}\right\}, (3)$$

где функции $U_i(u)$,$(i = 1,2)$ определены соотношениями:

$$U_i(u) = X_i^m(u,1) - u_i X_3^m(u,1), u = (u_1, u_2). \; (4)$$

Вводя новое время *r* по формуле:

$$dr = X_3^{m-1}(t)dt, \; m \geq 1 \; (5)$$

получим

$$\left.\begin{aligned} a)\ \frac{dui}{dt} &= U_i(u) \\ b)\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3 X_3^m(u,1) \end{aligned}\right\} (6)$$

Очевидно, что во всякой области пространство R^3 траектории систем (3) и (6) совпадают как точечные множества, однако параметры на них различны, при этом направление по *r* совпадает с направлением по t, если m–нечетное или m–чётное и $X_3(t) > 0$.

Систему (6) будем также рассматривать и при $x_3 = 0$, хотя преобразование (2) не определено при $x_3 = 0$. Формулы (2) - (5) определяют гомеоморфное соответствие между точками *x* пространства и точками (u_1, u_2, x_3) пространства u_1, u_2, x_3, с выключённым началом, топологический переводящие траекторий системы (1) в траектории системы (6).

Отметим, что траектории системы (6), определённые для всех значений τ, совпадают с траекториями системы (1), определенными лишь для значений t в некотором ограниченном или полубесконечном интервале. Решение системы (6а), отвечающее начальным значениям $u = u^o$ при $\tau = \tau_0$, запишем в виде

u = u (τ, u_0). Тогда решение уравнения (6 б), соответствующее решению

u = u (τ, u^0) и начальному значению $x_3 = x_3^o > 0$ при $\tau = \tau_0$ определяется с помощью формулы.

$$x_3(t) = x_3^0 exp \int_{\tau_0}^{\tau} x_3^m \, [u(\tau, u^0), 1] d\tau, (7)$$

Где x_3^0 – произвольная постоянная.

Решение системы (6) соответствующее начальным данным u = u^0,

$x_3 = x_3^0 > 0$ при $\tau = \tau_0$, будем записывать в виде

$$\text{u} = \text{u}(\tau, u^0), \ \ x_3 = x_3(\tau, u^0, x_3^0). (8)$$

В дальнейшем через γ обозначим траектории системы (6а) в плоскости $u_1 u_2$, причем особые точки и замкнутые кривые обозначим соответственно через g^i и θ^j, а ω и α предельные множества траектории через $\Omega_\gamma, A_\gamma, -[2]$.

Рассмотрим цилиндр G(u), образованный лучами, проходящими при точки траектории u = u(τ, τ_0) системы (6а). Это поверхность являются интегральным многообразием системы (6). Такому цилиндру в пространстве *x* соответствует коническая поверхность $G(u)$, образованная лучами, проходящими через точку O. Это поверхность является интегральным многообразием системы (1).

(1) отметим следующие свойстве траекторий системы (6):

а) Если луч G(g) ∈ G(γ) является интегральным , то в силу единственности решенный , не одна траекторий W∈ $G(\gamma)$ не пересекает этот луч.

(1) интегральные многообразия, по рождаемые траекториями системы (6а), являются непересkающими себя гладкими цилиндрами G(u), на которых применима теория Пуанкаре – Бендиксона для двумерной системы (6а). Трехмерное пространство *x* разбивается на множество взаимно непересекающихся интегральных поверхностей, на каждой из которых

можно изучить картину траекторий системы (1).

Как известно, структура ω – предельного множества Ω_γ какой – либо траектории γ , состоит из двух обыкновенных точек, то есть $\Omega_\gamma = \Omega_\gamma^k \cup \Omega_\gamma^g$ множество обыкновенных точек $\Omega_\gamma^h = \Omega_\gamma$ заполняет все Ω_γ либо заполняет не более, чем счетное множество траекторий, каждая из которых обоим своими концами примыкает к особым компонентам множества Ω_γ^g. Кривая γ при этом спирала видно приближается к каждой из этих компонент. Для предельного множества Ω_γ какой либо – траектории в плоскости и, справедливо одно из следующих утверждений:

1) Ω_γ состоит из одной единственной точки g, которая является особой, т.е. Ω_γ=g.

2) Ω_γ состоит из единственной замкнутой траектории, т.е. Ω_γ= 0

3) Ω_γ является замкнутым многоугольником траектории П состоящим из конечного числа особых точек g^i и множества траекторий γ^j, каждая из которых примыкает к одной из этих особых точек g^i при $\tau \to \pm\infty$ α –передельное множество A_j имеет такое же строение, как и Ω_γ е той лишь разницей, что стремление к приделу происходит не при $\tau \to +\infty$, и при $\tau \to -\infty$. Таким образом на плоскости U с изолированным особыми точками возможны четыре видов траекторий [3]

1. Особые точкиg^i.
2. Траектории γ, приближающиеся к особой точки g.
3. Замкнутые траектории θ^j
4. Траектории, спирали видно приближающиеся к замкнутой траектории

1°. Некоторые простейшие свойства траекторий на интегральных цилиндрах.

а) Обозначаем через γ и ω траектории соответственно системы (6а) и (6), тогда

$X_i(\tau) = u_i(\tau, \tau_0, u^0)\, X_3(\tau, u^1, x_3^0)$ (9)

Где $X_3(\tau, u^0, x_3^0)$ – решение уравнение (6б), определяемое формулой

$X_3(\tau, \tau_o) = X_3^o \exp \int_{\tau_o}^{\tau} X_3^o(4(\tau, \tau_o), 1) d\tau$ (7)

б) Если траектории γ не является периодический, то каждая траектория

$\omega \in G(\gamma)$ пересекает луч е $\in G(\gamma)$ в одной и только одной точки.

в) Если траектория $\theta = \theta(\tau)$ является Т-периодической и $\theta(\tau) \neq 0$, то каждая траектория $\omega \in G(O)$ пересекает луч с одна и только одна раз при 0$\leq \tau \leq T$, где Т-период траектории $\theta(\tau)$.

г) Все траектории $\omega \in G(\gamma)$ пересекают каждый луч, не являющийся интегральным, в одном и том же направлении и образуют с ним один тот же ненулевой угол.

Перейдем к рассмотрению глобальной картины траекторий системы (6) на Особые точки g^i определение 1особая точка g называется отрицательной интегральных цилиндрах, соответствующих три типам траекторий.

2°. Изолированные, если $X_3^m(g,1) < 0 \quad (X_3^m(g,1) > 0)$.

Если траектория γ является изолированной особой точкой системы (6a), то интегральный цилиндр G(γ) вырождается в интегральный луч λ_g, $\lambda > 0$. Таким образом, интегральный луч является одномерным интегральным многообразием. Эти интегральные луча определяются по средством вещественных решений системы алгебраических уравнение

$$\frac{x}{x_1^m(x)} = \frac{x_2}{x_2^m(x)} = \frac{x_3}{x_3^m(x)}$$

Локальная качественная картина траекторий в трехмерной окрестности

интегрального луча и их существования различных типов будут изучены.

3°. Траектории, примыкающие к особым точкам.

Здесь рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть траектория γ примыкает к точке g при $\tau \to \pm\infty$, т.е. Ω_γ=$A_\gamma = g$. Границей цилиндра G(γ) является множество лучей, проходящих через траектории γ и луч G(g). Так как $\gamma \to g$ при $\tau \to \pm\infty$, то для любой траектории $\omega \in G(g^1)$ в силу (7), каждое из множеств Ω_ω и A_ω содержит либо точку g плоскости и, либо бесконечно удаленную точку цилиндра G(g).

Так как луч G(g) является интегральным многообразием, то одна из предельным множеств содержит точку g , а другое бесконечно – удаленную точку $\in$ G(g). Следовательно, все траектории цилиндре G(γ) является параболическим. Такому цилиндру соответствует конус в пространстве *x* , который назовём параболическим.

Из формулы (7), следует, что если $X_3^m(g,1) < 0$, то все траектории на цилиндре будут 0^+ кривыми (устойчивый параболический цилиндр) и если

$X_3^m(g,1) > 0$,то все траектории будут 0^- кривыми (неустойчивый параболический цилиндр) .

Таким образом, каждой эллиптической траектории γ , примыкающей к особой точке g при $\tau \to \pm\infty$, соответствует устойчивый (неустойчивый), параболический интегральный конус G(γ) системы (1) при $X_3^m(g,1) < 0$ ($X_3^m(g,1) > 0$).

Случай 2. Пусть траектория γ примыкает к двум различным особым точкам g^1 и g^2 $(g^1 \neq g^2)$ причем $\Omega_\gamma = g^1$, $A_\gamma = g^2$. Границей цилиндра G(γ) является траектория γ и интегральные лучи G(g^1) и G(g^2), которые являясь одномерными интегральными многообразиями, имеют согласное направление по τ. Точки лучей G(g^1) не могут принадлежать предельным множеством Ω_ω и A_ω какой – либо траектории ω , так как $\gamma \to g^1$ при $\tau \to +\infty$ и $\gamma \to g^2$ при $\tau \to -\infty$, то каждое из предельных множеств состоит из точки g^i или является бесконечно – удаленную точке по направленную G(g^1) при $\tau \to +\infty$ и направлению G(g^2) при $\tau \to -\infty$. В зависимости от знаков чисел $X_3^m(g',1)$ и $X_3^m(g^2,1)$ на цилиндре G(γ) возможные следующие расположения траекторий системы (6): параболические , гиперболические, эллиптические.

1) $X_3^m(g',1) > 0, \quad X_3^m(g^2,1) > 0$; 2) $X_3^m(g',1) < 0, \quad X_3^m(g^2,1) < 0$

3) $X_3^m(g',1) > 0$, $X_3^m(g^2,1) < 0$, 4) $X_3^m(g',1) < 0$, $X_3^m(g^2,1) > 0$

В случаях 1) и 2) все траектории на цилиндре является параболическими, в третьем случае гиперболическими и в четвертом случае эллиптическими. Итак , каждое траектории γ , примыкающей к 2 предельной точке g^1 и $\alpha -$ предельной точке g^2 системы (6а) соответствуют при типа интегральных конусов системы (1):

1. параболический конус при $X_3^m(g',1) > 0,\ X_3^m(g^2,1) > 0;$
2. гиперболический конус при $X_3^m(g',1) > 0,\ X_3^m(g^2,1) < 0;$
3. эллиптический конус при $X_3^m(g',1) < 0,\ X_3^m(g^2,1) > 0.$

4°. Периодические траектории θ^j имеет место следующая известно, что система (6) имела Т – периодические решение на цилиндре G(θ) необходимо

$$\int_0^T X_3^m(\theta,1)d\tau = 0 \qquad \theta(\tau+T) = \theta(\tau) \ (11)$$

Определение. Т – периодическое решение $\theta = \theta(\tau)$ системы (6а) назовем отрицательным (положительным), если

$$\nabla(\theta(\tau)) \equiv \int_0^T X_3^m(\theta(\tau),1)d\tau < 0 \qquad (\nabla(\theta(\tau)) > 0) \ (12)$$

могут представиться два случая. **Случай 1.** $\nabla\big(\theta(\tau)\big) = 0$, тогда функция $X_3^m(\theta(\tau),1)$ определяемая формулой (7), является Т- периодической и каждой траектории θ, для который $\nabla(\theta) = 0,$ соответствует интегральный цилиндр, который назовем цилиндром типа центр. **Случай 2.** $\nabla(\theta) \neq 0.$ В этом случае функция $X_3^m(\theta(\tau),1),$ определяемая формулой (7) не является Т- периодической. В силу свойства 4 все траектории $\omega \in G(\theta)$ пересекают каждый луч на цилиндре G(θ) в одном и тот же направлении и образуют с ним один и тот же ненулевой угол. Поэтому на основании (7) имеют место следующие неравенства.

$$X_3(\theta(\tau+\mathrm{T}), 1) < X_3(\theta(\tau),1), \text{ если } \nabla(\theta(\tau)) < 0 \ (13)$$

$$X_3(\theta(\tau+\mathrm{T}), 1) > X_3(\theta(\tau),1), \text{ если } \nabla(\theta(\tau)) > 0 \ (14)$$

Отсюда, если $\nabla(\theta) < 0,$то $\mathrm{X}_3(\theta,1) \to 0$ при $\tau \to +\infty$ и $\mathrm{X}_3(\theta,1) \to +\infty$ при $\tau \to -\infty.$ Имеем устойчивый параболический цилиндр. Если же $\nabla(\theta) > 0,$ то $X_3(\theta,\ 1) \to \infty$ при $\tau \to +\infty$, $X_3(\theta,1) \to 0$ при $\tau \to -\infty.$ Имеем неустойчивый параболический цилиндр.

Литература

1. А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», ГТТИ, М.- Л. 1947
2. Ш. Р. Шарипов. Б.Хусанов «Об обобщенных узлах и седлах в трёхмерном пространстве» ДАН. УзССР, 1971 , №11
3. B. Khusanov, M. Turayev "On a qualitative picture of a Homogeneous Two –Dimensional System's Trajectory" European multidisciplinary journal of modern sciencf, in vol 4. 2022. P 774-782.