https://gospodarkainnowacje.pl

GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 33 | 2023

Economy and Innovation

ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

ENG SODDA TALABLAR (PUASSON) OQIMI

F. O. Husanov

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Oliy matematika kafedrasi katta o'qituvchisi, husanovfarrux7@gmail.com

A R T I C L E I N F O.

Kalit so'zlar: talablar oqimi, statsionarlik xossasi, so'ng ta'sirning yo'qligi xossasi, ordinarlik xossasi, Puasson oqimi, to'la ehtimol.

Annotatsiya

Ushbu maqolada bir nechta juda sodda xossalarga ega bo'lgan talablar oqimi va eng oddiy oqimning matematik modeli qaralgan. T vaqt davomida eng oddiy oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli Puasson formulasi bilan aniqlanishi ko'rsatilgan.

Ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida talablar oqimi deb vaqtning qandaydir momentlarida birin ketin keladigan talablar ketma-ketligiga aytiladi. Bunga misol qilib quyidagilarni olish mumkin: telefon stansiyasiga keladigan chaqiriqlar oqimi, tez yordam punktiga keladigan chaqiriqlar oqimi, aloqa bo'limiga keladigan buyurtma xatlar oqimi, aeraportga qo'nadigan samolyotlar oqimi, maishiy xizmat ko'rsatish korxonasiga keladigan mijozlar oqimi va boshqalar. Oqim tashkil qiladigan talablar umuman turlicha bo'lishi mumkin, lekin bu yerda biz faqat kelish momentlari bilan farq qilinadigan bir jinsli talablar oqimini qaraymiz.

Agar talablar birin-ketin aniq bir muayyan vaqt oralig'idan keyin kelsa, bunday talablar oqimi regulyar oqim deyiladi. Bunday oqim rel sistemalarda nisbatan kam uchraydi. Ommaiy xizmat ko'rsatish sistemalari uchun xarakterlisi vaqtning tasodifiy momentlarida keladigan talablar oqimidir.

Endi biz bir nechta juda sodda xossalarga ega bo'lgan talablar oqimini qaraymiz.

1. Statsionarlik xossasi. Bu xossa istalgan t vaqt oralig'ida oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli k ga va vaqt oralig'ining uzunligi t ga bog'liq bo'lib, uning sanoq boshiga bog'liq bo'lmasigini bildiradi.Bunda turli vaqt oraliqlari o'zaro kesishmaydi deb faraz qilinadi.Masalan, oqimning k ta talabi davomiyligi $t-6$ vaqt birligiga teng bo'lgan $(1,7),\ (10,16),\ (T,T+6)$ vaqt oraliqlarida kelishi ehtimollari o'zaro tengdir.

Shunday qilib, agar oqim statsionarlik xossasiga ega bo'lsa, u holda davomiyligi t ga eng bo'lgan vaqt oralig'ida k ta talabning kelishi ehtimoli k va t ning funksiyasi bo'ladi.

2. So'ng ta'sirning yo'qligi xossasi. Bu xossa istalgan vaqt oralig'ida oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli qaraliyotgan vaqt oralig'i boshlanishidan avvalgi vaqt momentlarida talablar kelganligi yoki kelmaganligiga bog'liq emasligini bildiradi. Boshqacha qilib aytganda , istalgan vaqt oralig'ida k ta talabning kelishi qaraliyotgan oraliqning boshlanishidan avval nechta talab kelgan, ular qanday ketma-ketlikda kelganligi shartida hisoblangan shartli ehtimol shartsiz ehtimolga teng. Demak, oqimning avvalgi tarixi (ahvoli) talabning kelajakda kelishi ehtimoliga ta'sir qilmaydi.

Shunday qilib, agar oqim so'ng ta'sirning yo'qligi xossasiga ega bo'lsa, u holda o'zaro kesishmaydigan vaqt oraliqlarida oqimning bitta yoki bir nechta talablarning kelishi o'zaro bog'liq bo'lmaydi.

3. Ordinarlik xossasi. Bu xossa kichik vaqt oralig'ida ikkita va undan ko'p talablarning kelishi amalda mumkin emasligi bilan xarakterlanadi. Boshqacha qilib aytganda, kichik vaqt oralig'ida bittadan ortiq talabning kelishi ehtimoli bitta talabning kelishi ehtimoliga qaraganda e'tiborga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik.

Eng oddiy oqim (Puasson oqimi) deb, statsionarlik, so'ng ta'sir yo'qligi va ordinarlik xossalariga ega bo'lgan oqimga aytiladi.

Eslatma. Amaliyotda ko'pincha oqim yuqorida aytib o'tilgan xossalarga ega yoki ega emasligini aniqlash qiyin. Shuning uchun boshqa shartlar ham topiladiki, ular bajarilganda oqimning eng oddiy yoki eng oddiy oqimga yaqin deb olish mumkin. Jumladan, agar oqim ko'p sondagi o'zaro bog'liq bo'lmagan statsionar oqimlarning yig'indisi bo'lib, ularning har birini yig'indiga (yig'ilgan oqimga) ta'siri hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik bo'lsa, u holda yig'ilgan oqim (uning ordinarligi shartida) eng oddiy oqimga juda yaqin bo'ladi.

Teorema. T vaqt davomida (ichida) eng oddiy oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli quyidagi Puasson formulasi bilan aniqlanadi:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (k = 0,1,2,\dots,) \qquad (1)$$

Bu yerda λ musbat son.

(1) λ vaqt birligi ichida keladigan talablarning o'rtacha soni bo'lib, u oqimning intensivligi (zichligi) deyiladi.

Bu formula eng oddiy oqimning barcha xossalarini o'zida aks ettiradi. Darhaqiqat, formuladan ko'rinib turibdiki, intensivlik berilgan holda t vaqt ichida k ta talabning kelishi ehtimoli k va t ning funksiyasi bo'ladi, bu esa statsionarlik xossasini xarakterlaydi.

Formulada qaralayotgan vaqt oralig'ining boshlanishidan avvalgi ma'lumotlardan foydalanilmaydi, bu esa so'ng ta'sirning yo'qligi xossasini xarakterlaydi.

Formula ordinarlik xossasini aks ettirishiga ishonch hosil qilaylik. $k = 0$ va $k = 1$ deb, mos ravishda talablarning kelmaslik va bitta talabning kelishi ehtimollarini topamiz. (1) formulaga ko'ra

$$P_t(0) = e^{-\lambda t} \quad , \quad P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad .$$

Demak, bittadan ko'p talablarning kelishi ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - \left(e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}\right).$$

Ushbu

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \cdots.$$

Yoylimadan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_t(k > 1) = 1 - \left[\left(1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \cdots.\right) + \lambda t\left(1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \cdots.\right)\right] = \\ = \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \cdots.$$

$P_t(1)$ va $P_t(k > 1)$ ehtimollarni solishtirib ko'rsak, t ning kichik qiymatlarida bittadan ko'p talablarning kelishi ehtimoli bitta talabning kelishi ehtimolidan hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik bo'lar ekan degan xulosaga kelamiz, bu esa oqimning ordinarlik xossasini xarakterlaydi.

Shunday qilib, Puasson formulasini eng oddiy oqimning matematik modeli deb hisoblash mumkin.

Endi (1) formulani isbotlashga o'tamiz. Buning uchun avval yetarlicha kichik Δt vaqt oralig'ida

$$P_{\Delta t}(1) = \lambda\Delta t + 0(\Delta t)$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Uzunligi (davomiyligi) 1 ga teng bo'lganvaqt oralig'ini qaraymiz va p orqali shu vaqt oralig'ida oqimning bironta ham talabi kelmasligi ehtimolini belgilaylik. Oeraliqni n ta o'zaro kesishmaydigan teng bo'laklarga ajratamiz. Oqimning statsionarlik va so'ng ta'sirning yo'qligi xossasiga ko'ra

$$p = [P_{\frac{1}{n}}(0)]^n$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $P_{\frac{1}{n}}(0) = p^{\frac{1}{n}}$ ni va istalgan butun k da esa

$$P_{\frac{k}{n}}(0) = p^{\frac{k}{n}}$$

ni hosil qilamiz.

Endi t –biror manfiymas son bo'lsin. Istalgan n da shunday k sonini toppish mumkinki, natijada

$$\frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}$$

qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ravshanki, $P_t(0)$ ehtimol vaqtning kamayuvchi funksiyasi, shu sababli

$$P_{\frac{k-1}{n}}(0) \geq P_t(0) \geq P_{\frac{k}{n}}(0)$$

bo'ladi. Demak, $P_t(0)$ ehtimol ushbu

$$p^{\frac{k-1}{n}} \geq P_t(0) \geq p^{\frac{k}{n}} \quad (2)$$

qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi. Endi n va k lar cheksizlikka shunday intilsinki, natijada $\frac{k}{n} \to t$ bo'lsin. U holda (2) tengsizlikdan istalgan t da $P_t(0) = p^t$ ligi kelib chiqadi. $P_t(0)$ funksiya ehtimol sifatida $0 \leq P_t(0) \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Unda quyidagi uchta holni ko'rish mumkin:

$$1)p = 0; \quad 2)p = 1 \quad 3)0 < p < 1.$$

Birinchi holda istalgan t da $P_t(0) = 0$ va demak, har qanday uzunlikdagi vaqt oralig'ida oqimning hech bo'lmaganda bitta talabi kelishi ehtimoli 1 ga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, har qanday uzunlikdagi vaqt oralig'ida bir ehtimol bilan oqimning cheksiz ko'p talabi keladi. Ikkinchi holda esa $P_t(0) = 1$, demak, oqimning hech bir talabi kelmaydi. Muhimi uchunchi hol, bunda $p = e^{-\lambda}$ deb olamiz , bu yerda $t > 0$ da

$$P_t(0) = e^{-\lambda t} \quad (3)$$

formulani keltirib chiqardik.

Har qanday $t > 0$ da

$$P_t(0) + P_t(1) + P_t(k > 1) = 1$$

tenglik o'rinli bo'lishi ravshan. Bundan esa

$$P_t(1) = 1 - P_t(0) - P_t(k > 1)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda agar t ni yetarlicha kichik deb olsak, u holda

$$P_t(0) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + 0(t) \quad (4)$$

va ordinarlik shartiga ko'ra $P_t(k > 1) = 0(\Delta t)$ ekanligini hisobga olib ,

$$P_t(1) = 1 - 1 + \lambda t + 0(t) = \lambda t + 0(t) \quad (t \to 0) \quad (5)$$

ga ega bo'lamiz:

Endi t vaqt davomida oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli $P_t(k)$ ni hisoblaymiz. Buning uchun $t + \Delta t$ vaqt oralig'ida oqimning k ta talabi kelishi hodisasining $P_{t+\Delta t}(k)$ ni topamiz. Bu hodisa quyidagi usullar bilan ro'y berishi mumkin:

1) t vaqt ichida oqimning k ta talabi kelgan, Δt vaqt ichida esa bironta ham talab kelmagan:

2) t vaqt ichida oqimning $k - 1$ talabi kelgan , Δt vaqt ichida esa faqat bitta talabi kelgan:

$(k + 1)$ t vaqt ichida oqimning bironta ham talabi kelmagan, Δt vaqt ichida esa k ta talabi kelgan.

Oqimning statsionarlik va so'ng ta'sirning yo'qligi xossalarini hisobga olsak, to'la ehtimol formulasiga ko'ra

$$P_{t+\Delta t}(k) = \sum_{i=0}^{k} P_t(i) P_{\Delta t}(k - i)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ushbu

$$R_k = \sum_{i=0}^{k-2} P_t(i) P_{\Delta t}(k - i)$$

belgilashni kiritib,

$$P_{t+\Delta t}(k) = P_t(k)P_{\Delta t}(0) + P_t(k - 1)P_{\Delta t}(1) + R_k$$

oqimning ordinarligidan foydalanib yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$R_k = \sum_{i=0}^{k-2} P_t(i) P_{\Delta t}(k - i) \le \sum_{i=0}^{k-2} P_{\Delta t}(k - i) = \sum_{s=2}^{k} P_{\Delta t}(s) = P_{\Delta t}(s > 1) = 0(\Delta t)$$

ga ega bo'lamiz. U holda

$$P_{t+\Delta t}(k) = P_t(k)P_{\Delta t}(0) + P_t(k - 1)P_{\Delta t}(1) + 0(\Delta t)$$

bo'ladi. Bundan esa (4) va (5) munosabatlarni hisobga olib,

$$P_{t+\Delta t}(k) = (1 - \lambda\Delta t)P_t(k) + \lambda P_t(k - 1)\Delta t + 0(\Delta t)$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$P_{t+\Delta t}(k) - P_t(k) = -\lambda P_t(k)\Delta t + \lambda P_t(k-1)\Delta t + 0(\Delta t)$$

orttirmaga ega bo'lamiz.Bu tenglikning har ikkala tomonini avval Δt ga bo'lib, so'ng $\Delta t \to 0$ da limitga o'tamiz:

$$\frac{P_{t+\Delta t}(k) - P_t(k)}{\Delta t} = -\lambda P_t(k) + \lambda P_t(k-1) + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{t+\Delta t}(k) - P_t(k)}{\Delta t} = -\lambda P_t(k) + \lambda P_t(k-1).$$

$(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, chunki $0(\Delta t)$ miqdor Δt ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor) .

Agar

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{t+\Delta t}(k) - P_t(k)}{\Delta t} = P_t{}'(k)$$

ekanligini e'tiborga olsak, undan yuqoridagi tenglikdan

$$P_t{}'(k) = -\lambda P_t(k) + \lambda P_t(k-1) \quad (6)$$

differensial tenglamaga kelamiz. Bu differensial tenglama uchun boshlang'ich shartlar

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(k) = 0, \qquad k \geq 1$$

lar bo'ladi.

(6) differensial tenglamaning yechimi

$$P_t(k) = e^{-\lambda t} V_t(k) \quad (7)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $V_t(k) -$ aniqlanishi kerak bo'lga yangi no'malum funksiya . (7) tenglamani defferinsiallab

$$P_t{}'(k) = \left(e^{-\lambda t} V_t(k)\right)' = -\lambda e^{-\lambda t} V_t(k) + e^{-\lambda t} V_t{}'(k) \quad (8)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(7) va (8) larni (6) differensial tenglamaga qo'yamiz:

$$-\lambda e^{-\lambda t} V_t(k) + e^{-\lambda t} V_t{}'(k) = -\lambda e^{-\lambda t} V_t(k) + \lambda e^{-\lambda t} V_t(k-1)$$

$$V_t{}'(k) = \lambda V_t(k-1) \quad (9)$$

Differensial tenglamani hosil qilamiz. (2.1.7) formuladan foydalanib, (2.1.9) differensial tenglama uchun quyidagi boshlang'ich shartlarga ega bo'lamiz:

$$V_0(0) = 1, V_0(k) = 0, \ k \geq 1 \quad (10)$$

Endi (9) differensial tenglamaning yechimini ketm-ket topishimiz mumkin. $k = 1$ bo'lsin, u holda (9) tenglama

$$V_t{}'(1) = \lambda V_t(0) \ yoki \quad \frac{dV_t(1)}{dt} = \lambda V_t(0)$$

ko'rinishda bo'ladi. (3) va (7) formulalardan foydalanib, $V_t(0)$ ni topamiz:

$e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} V_t(0)$ ya'ni $V_t(0) = 1$.

U holda yuqoidagi differensial tenglama

$\frac{dV_t(1)}{dt} = \lambda$ yoki $dV_t(1) = \lambda\, dt$

bo'ladi. Uni $(0, t)$ oraliqda integrallab,

$$\int_0^t dV_t(1) = \int_0^t \lambda d(t) \quad yoki \; V_t(1) - V_0(1) = \lambda t$$

ga ega bo'lamiz va (10) boshlang'ich shartlardan foydalanib,

$$V_t(1) = \lambda t$$

ni hosil qilamiz.

Shunga o'xshash quyidagilarni topamiz:

$$V_t(2) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}, V_t(3) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}, \dots \; V_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

Demak, (6) diferensial tenglamaning yechimi

$$P_t(k) = e^{-\lambda t} V_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunday qilib, t vaqt davomida eng oddiy oqimning k ta talabi kelishi ehtimoli

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

formula bilan aniqlanar ekan.

Oqimning muhim xarakteristikalaridan biri qo;shni talablari orasidagi vaqt uzunliklarining taqsimotidir. Eng oddiy oqimning ixtiyoriy ikki qo'shni talab orasidagi vaqtni T orqali belgilaymiz va uning

$$F(t) = P(T < t)$$

taqsimot funksiyasini topamiz. $(T < t)$ hodisaga qarama-qarshi bo'lgan $(T \geq t)$ hodisaning ehtimoliga o'tamiz:

$1 - F(t) = P(T \geq t)$ (11)

Bu oqimning biron talabi kelgan momentdan boshlangan, uzunligi t ga teng bo'lgan vaqt oralig'ida boshqa bironta ham talabning kelmasligi ehtimoli bo'ladi. Oddiy oqim so'ng ta'sirning yo'qligi xossasiga ega , shu sababli $P(T \geq t)$ ehtimolni (1) formula bo'yicha hisoblash mumkin.

$P(T \geq t) = P_t(0) = e^{-\lambda t}$ (12)

(11) va (12) formulalardan

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} (t > 0)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, eng oddiy oqimning istalgan ikkita qo'shni talablar o'rtasidagi vaqt uzunligi ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lar ekan.

Ko'rsatkichli taqsimot qonuni ajoyib bir xossaga ega.

Teorema. Agar ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan T vaqt oralig'i biror τ vaqt davom qilgan bo'lsa, u holda qolgan $T-\tau$ vaqt oralig'ining taqsimot qonunini hech qanday o'zgartirmaydi; u ham butun T vaqt oraliq qanday taqsimotga ega bo'lsa , xuddi shunday taqsimotga ega bo'ladi.

Isboti. Buni isbotlash uchun taqsimot funksiyasi.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (13)$$

bo'lgan T tasodifiy vaqt oralig'ini qaraymiz.Faraz qilaylik, bu vaqt oralig'i biror τ vaqt davom etayotgan bo'lsin, ya'ni $T > \tau$ hodisa ro'y bergan co'lsin. Bu farazda oraliqning qolgan $T-\tau$ qismining shartli taqsimot qonunini topamiz, uni $F^{(\tau)}(t)$ bilan belgilaymiz:

$$F^{(\tau)}(t) = P(T - \tau < \frac{t}{T > \tau})$$

$F^{(\tau)}(t)$ shartli taqsimot funksiya τ ga bog'liq emasligi va uning $F(t)$ ga tengligini isbot qilamiz.

$F^{(\tau)}(t)$ ni hisoblash uchun avval $(T > \tau)$ va $(T - \tau < t)$ hodisalar ko'paytmasining ehtimolini topamiz. E htimollarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra

$$P\{(T > \tau)(T - \tau < t)\} = P(T > \tau)P\left(T - \tau < \frac{t}{T > \tau}\right) = P(T > \tau)F^{(\tau)}(t)$$

Bundan $F^{(\tau)}(t)$ ni topamiz:

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{P\{(T > \tau)(T - \tau < t)\}}{P(T > \tau)}$$

Bu tenglikda $\{(T > \tau)(T - \tau < t) < t\}$ hodisani unga teng kuchli bo'lgan $(\tau < T < t + \tau)$ hodisa bilan almashtiramiz. Natijada

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{P\{(\tau < T < t + \tau)\}}{P(T > \tau)} = \frac{F(t + \tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan (13) formulaga ko'ra

$$F^{(\tau)}(t) = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\tau)} - (1 - e^{-\lambda\tau})}{1 - (1 - e^{-\lambda\tau})} = \frac{e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = \frac{e^{-\lambda\tau}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda\tau}} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} = F(t)$$

ni hosil qilamiz, shuni isbotlash talab qilingan edi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Прохоров Ю.В. Переходные явления в процессах массового обслуживание. Литовский мат.сборник, №2, 1063.
2. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue, Oper. Res., v19, 1971, 219-233.
3. Такач Л. Теория очередей. 1966, 216 стр.
4. Риордан Дж. Вероятностное сисеуьы обслуживания. 1966, 160 стр.