https://gospodarkainnowacje.pl

GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 34 | 2023

Economy and Innovation

ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

VARIATSION HISOB ASOSIY MASALASINING KUCHSIZ EKSTREMUMINING YETARLI SHARTLARI

Salimov Esanjon Xusen o'g'li

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

ARTICLEINFO.

Tayanch iboralar: ikkinchi variatsiya, Lejandr sharti, qo'shib olingan variatsion masala, Yakobi sharti, kuchaytirilgan Yakobi va Lejandr shartlari, Veyershtrass funksiyasi, Veyershtrass sharti, kuchli ekstremumning yetarli sharti, Veyershtrass-Erdman shartlari, kvadratik funksionalning ekstremumi.

Annotatsiya

Ushbu maqolada variatsion hisob asosiy masalasi uchun Kuchsiz ekstremumning yetarli shartlari haqida fikr yuritib, ushbu masalaning nazariy ahamiyatini yoritish.

Shunday qilib, variatsion hisob asosiy masalasida ekstremumning birnchi tartibli zaruriy sharti - joyiz funksiyaning stasionarligi (Eyler tenglamasining bajarilishi) bo'lsa, Lejandr va Yakobi shartlari – ikkinchi tartibli zaruriy shartlardir.

Sodda misollar ko'rsatadiki, bu uchala shartning birortasi ham alohida olganda ekstremumning yetarli sharti bo'la olmaydi. Ammo ular birgalikda kuchsiz ekstremumning yetarli shartiga yaqinroqdir.

Quyida Lejandr va Yakobi shartlarini kuchaytirish natijasida kelib chiqadigan yetarli shartlarni keltiramiz.

T e o r e m a. Faraz qilaylik:

a) $F(x,y,y') \in C^{(3)}(Q), y^0(x) \in C^{(2)}[x_0 x_1]$ -joyiz stasionar funksiya bo'lsin;

b) kuchaytirilgan Lejandr sharti bajarilsin:

$$F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) > 0 \quad (<0) \quad \forall x \in [x_0 x_1];$$

c) kuchaytirilgan Yakobi sharti o'rinli bo'lsin: $y^0(x)$ joyiz chiziq bo'ylab $(x_0,x_1]$ da x_0 nuqtaga qo'shma bo'lgan x_1 nuqta mavjud emas.

U holda, $y^0(x)$ - variatsion hisobning asosiy masalasida kuchsiz lokal minimal (maksimal) bo'ladi.

I s b o t i. Funksionalning ikkinchi variatsiyasi uchun hosil qilingan formuladagi ikkinchi qo'shiluvchini bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^{x_1} 2hh' F_{yy'}dx = \int_{x_0}^{x_1} F_{yy'}\frac{d}{dx}h^2dx = F_{yy'}h^2(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} h^2\frac{d}{dx}F_{yy'}dx = -\int_{x_0}^{x_1} h^2\frac{d}{dx}F_{yy'}dx \qquad (1)$$

$$u(x)\in C^{(2)}, u(x)>0, x\in[x_0,x_1]$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $u(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}F_{y'y'}h^2\right)dx = \frac{u'}{u}F_{y'y'}h^2\Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \qquad (2)$$

munosabat bajariladi. Endi (1) ni hisobga olib, (2) dan,

$$\delta^2 J[y^0,h] = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}F_{y'y'}\right)\right]h^2dx - 2\left[\frac{u'}{u}F_{y'y'}\right]hh' + [F_{y'y'}]h'^2\right\}dx \qquad (3)$$

tenglikni olamiz. $u(x)$, $x\in[x_0,x_1]$ funksiyani shunday tanlaymizki, (3) dagi integral ostidagi ifoda h va h'ga nisbatan to'la kvadrat bo'lsin. Buning uchun, quyidagi:

$$\left[\frac{u'}{u}F_{y'y'}\right]^2 = \left[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}F_{y'y'}\right)\right]F_{y'y'} \qquad (4)$$

ayniyatning bajarilishi zarur va yetarli.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u'}{u}F_{y'y'}\right) = \left(\frac{u''u-u'^2}{u^2}\right)F_{y'y} + \frac{u'}{u}\frac{d}{dx}F_{y'y'}$$

bo'lgani uchun, (4) ayniyatni, $F_{y'y'}\{-u''F_{y'y'} - u'\frac{d}{dx}F_{y'y'} + (F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'})u\}/u = 0$

(5)

ko'rinishda yozish mumkin. Teoremaning shartiga ko'ra,

$F_{y'y'} = F_{y'y'}(x, y^0(x), y^{0'}(x)) \neq 0,\ x\in[x_0,x_1]$. Demak, (5) dan ko'rinadiki, $u(x)$ funksiya, $(A(x)u''+B(x)u'+C(x)u)/u=0$ tenglamani qanoatlantirishi kerak, bu yerda *A(x),B(x),C(x)*- (9) Yakobi tenglamasidagi kabi aniqlanadi.Teoremaning c) shartiga ko'ra,

$$A(x)u''+B(x)u'+C(x)u=0 \qquad (6)$$

Yakobi tenglamasi, $u(x_0)=0,\ u(x^*)=0,\ x\in[x_0,x_1]$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimga ega emas. $[x_0,x_1]$ ning kompaktligi va differensial tenglama yechimining boshlang'ich shartlaridan uzluksiz bog'liqligi haqidagi teoremadan, shunday yetarli kichik $\varepsilon>0$ sonning mavjudligi kelib chiqadiki, (6) tenglamaning $u(x_0-\varepsilon)=0,\ u'(x_0-\varepsilon)=1$ boshlang'ich shartlardagi yechimi $[x_0,x_1]$ da musbat bo'ladi. Shunday qilib (1), (4) shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya mavjud. Shu funksiya yordamida, (3) ifodani,

$$d^0 J[y^0,h] = \int_{x_0}^{x_1} \{[F_{y'y'}]^{\frac{1}{2}} h' - [F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'} - \frac{d}{dx}(\frac{u'}{u}F_{y'y'})]^{\frac{1}{2}} h^2 dx$$

(7) ko’rinishda yozamiz:

(7) dan ko’rinadiki, barcha $h(x) \in C^{(1)} x \in [x_0, x_1], h(x_0) = h(x_1) = 0,$ funksiyalar uchun $\delta^2 J[y^0, h^*] \geq 0$ bajariladi. Agar biror $h^*(x) \neq 0, x \in [x_0, x_1]$ funksiya uchun $\delta^2 J[y^0, h^*] = 0$ deb faraz qilsak, (7) dan

$$[F_{y'y'}]^{\frac{1}{2}} h^*{}'(x) = [F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'} - \frac{d}{dx}(\frac{u'}{u}F_{y'y'})]^{\frac{1}{2}} h^*(x) \qquad \forall x \in [x_0, x_1]$$

bo’lishi kelib chiqadi. Bu yerdan $h^*(x_0) = 0,\ F_{y'y'}|_{x=x_0} > 0$ shartlarni hisobga olib, $h^*(x_0) = 0$ ga ega bo’lamiz. Ammo $h^*(x)$ funksiya (8) minimallashtirish masalaning yechimi bo’lgani uchun, $\delta^2 J[y^0, h^*] = 0$, (9) Yakobi tenglamasini qanoatlantiradi va $h^*(x_0)=h^*{}'(x_0)=0$ boshlang’ich shartlardan, $h^*(x) \equiv 0,\ x \in [x_0,x_1]$ bo’lishi kelib chiqadi. Bu olingan qarama-qarshilik ko’rsatadiki, barcha $h^*(x) \neq 0,\ x \in [x_0,x_1],\ h(x_0)=h(x_1)=0$ funksiyalar uchun, $\delta^2 J[y,h] > 0$ bajariladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова. Оптималлаштириш усуллари. Т. Узбекистон, 1995.
2. Л.Э.Эльсголц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука1969.
3. Исроилов И. Отакулов С. Вариацион хисоб ва оптималлаштириш усуллари.