https://gospodarkainnowacje.pl GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 34 | 2023
Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

# ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ

**Хайрулла Киличевич Каршибоев**

*зав.кафедры «Высщей математики» Самаркандский институт экономики и сервиса*

**ARTICLEINFO.**

**Ключевые слова:** гомеоморфизмов окружности, времени попадания, число вращения.

**Аннотация**

В этом работе доказана предельная теорема для функция распределений времени го попадания в при.



Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизмов окружности $T_f$ с поднятием $f$ т.е.

$$T_f x = f(x) \ (\mathrm{mod}\ 1),\ \ x \in S^1 = R^1 / Z^1 \cong [0,1),$$

где $f(x)$- непрерывная, строго возрастающая функция на $R^1$, удовлетворяющая условию $f(x+1) = f(x)+1,\ \ x \in R^1$. Функция $f$ называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма $T_f$. Отметим, что поднятие $f$ определено с точностью до аддитивной целой константы, но эта неоднозначность устраняется начальным условием $0 \le f(0) < 1$. А.Пуанкаре показал, что для любого $x \in R^1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho_f$, здесь и всюду в дальнейшем $f^{(n)}(x)$-обозначает $n$-ую итерацию функции $f(x)$. Число $\rho = \rho_f$ называемое *числом вращения*, не зависит от выбора $x$ и является важнейшей числовой характеристикой гомеоморфизма $T_f$.

Предположим, что число вращения $\rho = \rho_f$ иррационально. Пусть разложение $\rho$ в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...],\ k_n \ge 1$. Обозначим $\dfrac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n],\ \ n \ge 1$. Числа $q_n$- называются *временами первого возвращения* и удовлетворяют разностному уравнению: $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1},\ \ n \ge 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = k_1$.

Пусть $x_0 \in S^1$. Положим $x_i = T_f^i x_0,\ \ i \ge 1$. Заметим , что при нечётном $n$ точка $x_{q_n}$ лежит слева от $x_0$ , а при чётном $n$- справа. Обозначим через $V_n(x_0)$ замкнутый отрезок соединяющий точки $x_{q_n}$ и $x_{q_{n+1}}$. $V_n(x_0)$- называется $n$- *ой ренормализационной окрестностью* точки $x_0$. Определим *отображение Пуанкаре* $\pi_n : V_n(x_0) \to V_n(x_0)$:

$$\pi_n(x)=\begin{cases} T_f^{q_{n+1}}x, & \text{если} \quad x\in[x_{q_n},x_0), \\ T_f^{q_n}x, & \text{если} \quad x\in[x_0,x_{q_{n+1}}]. \end{cases}$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) главным является изучение поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$ при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка $V_n(x_0)$ экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to\infty$ при $n\to\infty$, поведение $\pi_n(x_0)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах. Введем перенормированные координаты $z$ на $V_n(x_0)$: $x=x_0+z(x_0-x_{q_n})$. Отсюда видно, что в новых координатах $x_0\to 0,\ x_{q_n}\to -1$. Обозначим через $a_n$ и $(-b_n)$ перенормированные координаты точек $x_{q_{n+1}}$ и $x_{q_n+q_{n+1}}$ соответственно. В новых координатах отображению $\pi_n(x)$ соответствует следующая пара $(f_n,g_n)$:

$$f_n(z)=\frac{f^{q_{n+1}}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_{n+1}}{x_0-x_{q_n}}, \qquad z\in[-1,0],$$

$$g_n(z)=\frac{f^{q_n}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_n}{x_0-x_{q_n}}, \qquad z\in[0,a_n].$$

Хорошо известно, что преобразование ренормгруппы в множестве гомеоморфизмов окружности с изломами имеет периодические траектории. Обозначим через $X$ множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x\in[-1,0];\ g(x),\ x\in[0,\alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$a)\quad f(0)=\alpha,\ g(0)=-1, \quad f(-1)=g(\alpha), \quad f(-1)<0, \quad f^{(2)}(-1)\ge 0;$$

$$b)\quad f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0]),\ \ g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha]),$$ при некотором $\varepsilon>0$.

Определим преобразование ренормализационной группы $R_b: X\to X$:

$$R_b(f(x),\ x\in[-1,0];\ g(x),\ x\in[0,\alpha])=(\tilde f(x),\ x\in[-1,0];\ \tilde g(x),\ x\in[0,\alpha']),$$

где $\tilde f(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\ \ \tilde g(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\ \ \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1)$.

Положим $c=f'(-0)\cdot\left(g'(+0)\right)^{-1}$, т.е. $c$ - величина излома пары $(f,g)$ в точке $x=0$. В работе Вула и Ханина доказано, что при фиксированном $c$ и числе вращения равным “золотому сечению”, преобразование $R_b$ имеет единственную периодическую орбиту $\{f_i(x),\ g_i(x),\ i=1,2\}$ периода два. Функции $f_i(x,c_i),\ g_i(x,c_i),\ i=1,2$ имеют вид:

$$f_i(x)=\frac{(\alpha_i+c_ix)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x},\ \ g_i(x)=\frac{\alpha_i\beta_i(x-c_i)}{\alpha_i\beta_ic_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

где $\alpha_1=\dfrac{c_1-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ \alpha_2=\dfrac{c_2-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ c_1=c,\ c_2=c^{-1},\ \beta_1=\beta_2=\beta_0$, а число $\beta_0$ – единственный корень уравнения $\beta^4-\beta^3-\beta^2\dfrac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0$ принадлежащий интервалу $(0,1)$. При помощи пар $(f_i,g_i),\ i=1,2$ определим гомеоморфизмы окружности $T_i:\ T_i(x)=l_i\left(f_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если

$0 \le x < (1+\alpha_i)^{-1}$ и $T_i(x) = l_i\left(g_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если $(1+\alpha_i)^{-1} \le x < 1$. Числа вращения этих гомеоморфизмов равны “золотому сечению”. Мы будем изучать гомеоморфизм $T_1$. Гомеоморфизм $T_2$ изучается аналогичным образом. Гомеоморфизм $T_1$ переобозначим через $T_b$. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех $C^1-$сопряженных с $T_b$ гомеоморфизмов окружности.

**Теорема 1.** [3]. Для всех отображений $T \in E(T_b)$ существует единственная непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U : I_+ \to R^1$ обладающая следующими свойствами:

1.Для любых $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1},...\varepsilon_n,...)$ и

$\vec{b} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, b_{k+1}, ..b_n, \ldots)$ из пространства $I_+$ верна оценка

$$\left|U(\vec{\varepsilon}) - U(\vec{b})\right| \le K_1 \alpha^k$$

где $\alpha = \alpha(T_b) \in (0,1)$ и константа $K_1 > 0$ не зависит от $\vec{\varepsilon}, \vec{b}$ и $k$.

2.Пусть $1 \le r < n,\ \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \xi_n(x_0, T),\ \Delta(a_1, a_2,..., a_r) \in \xi_r(x_0, T)$, $\Delta(a_1, a_2,..., a_n) \subset \Delta(a_1, a_2,..., a_r)$.

Тогда

$$\begin{aligned} l\left(\Delta(a_1, a_2,..., a_n)\right) &= l\left(\Delta(a_1, a_2,..., a_r)\right) \times \\ &\times \left(1 + \psi_1(a_1, a_2,..., a_n);\, T\right) \times \\ &\times \exp\Big\{ \sum_{s=r+1}^{n} U(a_s, a_{s-1},..., a_r,..., a_1, \vec{\gamma}(a_1))\Big\} \end{aligned}$$

где $\left|\psi_1(a_1, a_2,..., a_n;\, T)\right| \le const\, \alpha^r$.

Пусть $n \ge 1$ и $V_n(x_0)$ - $n-$ая ренормализационная окрестность точки $x_0 \in S^1$.

Определим $E_n^{(1)}(x) = \min\{\, i \ge 1 : T_f^i x \in V_n(x_0)\}$, $E_n^{(k)}(x) = \min\{\, i \ge E_n^{(k-1)}(x) : T_f^i x \in V_n(x_0)\},\ k \ge 1$. Рассмотрим случайные величины $D_n^{(k)}(x) = E_n^{(k)}(x) - E_n^{(k-1)}(x)$. Отметим, что $D_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(x)$ принимает значения от $1$ до $q_{n+1}$, а $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: $q_n$ и $q_{n+1}$. Введем нормированные случайные величины: $\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1}\, D_n^{(k)}(x)$. Задача состоит в изучении сходимости функции распределений для случайных величин $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$, а также их предельные распределения.

Обозначим $F_n^{(k)}(t) = \mu_f(\{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \le t\}),\ t \in R^1$. Отметим, что функции $F_n^{(k)}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота $T_\rho$. В работе де Фария и Коэло доказано, что в зависимости от числа вращения $\rho$ предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$ является или равномерным, или непрерывным и кусочно-линейным на отрезке $[0,1]$. А в случае $k>1$ предельное распределение для сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$является или распределением случайной величины $X\equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(t)$ функцию распределения $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега $l$: $\Phi_n^{(k)}(t)=l(\{x\in S^1:\overline{D}_n^{(k)}(x)\le t\}),\ \ t\in R^1$.

Если диффеоморфизм $T_f$ гладко сопряжен с линейным поворотом $T_\rho$, то для последовательности $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F_n^{(k)}(t)\}$, также справедливы. С другой стороны, для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома (или с нескольким точками излома лежащими на одной орбите и с нетривиальным произведением величин изломов) и с иррациональным числом вращения $\rho_f$ сопрягающий гомеоморфизм $T_\varphi$ является сингулярным.

Возьмем произвольный гомеоморфизм окружности $T\in B(T_0)$. Напомним, что $E_n^{(k)}(x)$ означает времени $k-$го попадания точки $x\in S^1$ в $n-$ый ренормализационный отрезок $V_n$. Обозначим $D_n^{(k)}(x)=E_n^{(k)}(x)-E_n^{(k-1)}(x),\ x\in S^1$. Случайная величина $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: $q_n$ или $q_{n+1}$. Нормируем её разделивна на $q_{n+1}^{-1}$:

$$\overline{D}_n^{(k)}(x)=q_{n+1}^{-1}D_n^{(k)}(x).$$

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(x)$ функцию распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега $l$.

**Теорема 2.** [2]. Пусть $k>1$. Тогда функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$относительно меры Лебега задается следующим образом:

$$\Phi_n^{(k)}(t)=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad t<q_n\,q_{n+1}^{-1};\\ \sum\limits_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)}\cap\pi_n^{-k}\Delta_0^{(n+1)}))+ & \\ +\sum\limits_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)}\cap\pi_n^{-k}\Delta_0^{(n+1)})), & \text{если}\quad q_nq_{n+1}^{-1}\le t<1;\\ 1, & \text{если}\quad t\ge 1.\end{cases}$$

В этом работе сформулируем и докажем предельную теорему для последовательности функций распределения времени $k-$го попадания $\Phi_n^{(k)}(t),\ \ k>1$.

**Теорема 3.** Пусть гомеоморфизм $T\in B(T_b)$, $k>1$ и $\Phi_n^{(k)}(t)$-функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$. Тогда

1) для всех $t\in R^1$ существует конечные предел $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(k)}(t)=\Phi^{(k)}(t)$,

причем $\Phi^{(k)}(t)=0$, если $t \le 0$, и $\Phi^{(k)}(t)=1$, если $t \ge 1$;

2) функция $\Phi^{(k)}(t)$ является ступенчатой функцией на $[0, 1]$ с двумя точками разрыва.

**Доказательство теоремы 3.** Предположим, что $k>1$. Функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ - ступенчатая функция, принимающая только три значения. Поэтому докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{D}_n^{(k)}(t)$ в три этапа.

1) $D_n^{(k)}(t)=0$, если $t<q_n\, q_{n+1}^{-1}$. Учитывая

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\rho$$

получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(k)}(t)=0$, если $t\le\rho$.

2) Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n^{(k)}(t)=1, \text{ если } t\ge 1.$$

3)Теперь докажем существование предела суммы

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})))+\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) \quad (1)$$

Сначала мы должны выяснить структуру множества $\pi_n^{-1}(\Delta_0^{(n+1)})\cap V_n$.

Напишем явный вид функции $\pi_n^{-1}(x)$:

$$\pi_n^{-1}(x)=\begin{cases} T^{-q_n}x, & \text{если } x\in[x_{q_n}, x_{q_{n+2}}),\\ T^{-q_{n+1}}x, & \text{если } x\in[x_{q_{n+2}}, x_{q_{n+1}})\end{cases}$$

Функция $\pi^{-1}(x)$, как видно из последней формулы, имеет разрыв только в точке $x=x_{q_{n+2}}$. Следовательно, для любого интервала $I\subset V_n$ область $\pi^{-1}(I)$ представляет собой интервал, если $x_{q_{n+2}}\in I$, или сумму двух интервалов, если $I$ не содержит точку $x_{q_{n+2}}$, или сумму двух интервалов, если $x_{q_n}\in I$. Отсюда вытекает, что

$$\Delta_0^{(n+1)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})=\bigcup_{m=1}^{l_1(k)}\omega'_m, \qquad \Delta_0^{(n)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})=\bigcup_{p=1}^{l_2(k)}\omega''_p$$

где $\omega'_m$ и $\omega''_p$ - такие интервалы, что $\omega'_m\subset\Delta_0^{(n+1)},\ 1\le m\le l_1(k);\ \ \omega''_p\subset\Delta_0^{(n)},\ 1\le p\le l_2(k)$. Отметим, что $l_1(k)+l_2(k)\le 2^k$. Сумму (1) обозначим $S_n$ и напишем в следующем виде:

$$S_n = \sum_{m=1}^{l_1(k)} \sum_{i=0}^{q_n -1} l(T^i(\omega'_m)) + \sum_{p=1}^{l_2(k)} \sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p)) .$$

В силу утверждения теоремы 1. Суммы $\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m))$ и $\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p))$ сходится при $n\to\infty$, отсюда следует, что существует конечный предел суммы $S_n$ при $S_n \to \infty$ . Теорема 3 доказана.

**Литература**


1. K.M.Khanin and E.B.Vul. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
2. Coelho Z., de Faria E. Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle// Israel J.Math.-1996.-№93.-P.93-112.
3. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.
4. И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. –М. Наука, 1980.
5. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.
6. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома// Ж. Функционал анализ и его приложения.-1998.-№32(3).-С.11-21.
7. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95