https://gospodarkainnowacje.pl GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 34 | 2023
Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

РЕНОРМАЛИЗАЦИИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОДНИМ ИЗЛОМОМ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ГЛАДКОСТИ КАЦНЕЛЬСОНА И ОРНСТЕЙНА

Каршибоев Хайрулло Киличович

канд.физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедры "Высшей математики",

Самаркандский институт экономики и сервиса,

Республика Узбекистан, г.Самарканд, karshiboyev@mail.ru

ARTICLEINFO.

Ключевые слова:
гомеоморфизмов окружности, определяющая функция, дробно-линейными, ренормализационной, число вращения.

Аннотация

В этом работе доказано, что ренормализации гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения, с одной точкой излома и удовлетворяющих условиям гладкости Кацнельсона и Орнстейна аппроксимируются функциями $F_{a_n,b_n,m_n}(z)$ и $G_{a_n,b_n,m_n,c_n}(z)$.

Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории нелинейных систем.

Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А.Пуанкаре в связи с задачами небесной механики [5].

Классическая теорема Данжуа утверждает, что диффеоморфизм окружности из класса $C^2(S^1)$ топологически сопряжен с линейным поворотом T_ρ, т.е. существует гомеоморфизм φ такой, что $\varphi \circ T_f = T_\rho \circ \varphi$. В теории одномерных отображений центральной является проблема гладкости сопряжения φ. Для диффеоморфизма окружности эта проблема была решена в определенном смысле полностью в конце 1980 –ых годов в работах Синая и Ханина, Кацнельсона и Орнстейна. При этом существенно использовался метод ренормализационной группы (РГ).

В теории динамических систем метод РГ впервые был использован М.Фейгенбаумом в 1978 году, для построения теории универсальности. Этот метод с успехом применяется для изучения гомеоморфизмов окружности. Синай и Ханин доказали, что ренормализации диффеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1), \varepsilon > 0$, с иррациональным числом вращения, аппроксимируются (в C^2-норме) линейными отображениями.

Важным классом с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами.

Поведение ренормализаций для гомеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения изучалось Вул и Ханиным. Естественным является изучение поведения ренормализаций гомеоморфизмов окружности с изломами с более низкой гладкостью [4].

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T_f единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0,1) \quad (1.1)$$

где скобка $\{\cdot\}$- обозначает дробную часть числа, а $f(x)$-определяющая функция T_f, удовлетворяет следующим условиям:

(c_1) $f(x)$ -непрерывная, строго возрастающая функция на R^1;

(c_2) $f(x+1) = f(x)+1$ для любого $x \in R^1$;

(c_3) гомеоморфизм $T_f x$ в точке $x = x_b$ имеет излом, т.е. существуют

конечные односторонние производные $f'(x_b \pm 0) > 0$ и $f'(x_b - 0) \neq f'(x_b + 0)$;

(c_4) $f'(x)$ -абсолютно непрерывная функция на $[x_b, x_b+1]$ и $f'' \in L_p(S^1; dl)$ при некотором $p > 1$.

Число $\sigma = \sigma_f(x_b) = \dfrac{f'(x_b - 0)}{f'(x_b + 0)}$ называется величиной излома T_f в точке $x = x_b$. Условие (c_4) называется условием гладкости Кацнельсона и Орнстейна [3].

Пусть число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально и разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид:

$\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...]$.

Положим

$$\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n], \quad n \geq 1.$$

Числа q_n-удовлетворяют разностному уравнению:

$$q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 1, \; q_1 = k_1, \quad n \geq 1.$$

Обозначим особую точку x_b через x_0 и рассмотрим ее итерации, т.е. $x_i = T_f^i x_0,\ i \geq 1$. Обозначим $\Delta_0^{(n)} = \Delta_0^{(n)}(x_0)$-замкнутый отрезок соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Обозначим через $V_n = V_n(x_0)$ замкнутый интервал соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. Ясно, что $V_n = \Delta_0^{(n)} \bigcup \Delta_0^{(n+1)}$. Интервал V_n-называется n-ой ренормализационной окрестностью точки x_0. Определим отображение Пуанкаре по формуле:

$$\pi_n(x)=\begin{cases} T_f^{q_{n+1}}x, \;\; если \;\; x\in\Delta_0^{(n)}\setminus\{x_0\}, \\ T_f^{q_n}x, \;\; если \;\; x\in\Delta_0^{(n+1)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) нас интересует главным образом поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$, при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка V_n экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to+\infty$ при $n\to\infty$, поведение $\pi_n(x)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах.

Введем перенормированные координаты z на V_n:

$$z=\frac{x-x_0}{x_0-x_{q_n}}, \quad x\in V_n \quad (1.3)$$

Обозначим $a_n=\dfrac{x_{q_{n+1}}-x_0}{x_0-x_{q_n}}$. Очевидно, что $a_n>0$. При $x\in V_n$, соответствующие координаты z принимают значения от -1 до a_n. В новых координатах отображению π_n соответствует следующая пара $(f_n,\, g_n)$:

$$f_n(z)=\frac{f^{q_{n+1}}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_{n+1}}{x_0-x_{q_n}},$$
$$g_n(z)=\frac{f^{q_n}(x_0+z(x_0-x_{q_n}))-x_0-p_n}{x_0-x_{q_n}}, \quad (1.4)$$

Пара функции $(f_n,\, g_n)$ называется n-ой ренормализацией отображения π_n. Положим $\Delta_i^{(n)}=T_f^i\Delta_0^{(n)},\; i\ge1,\; n\ge1$. Пусть для определенности n-нечетное число, тогда имеет место соотношение $x_{q_{n+1}}\prec x_0\prec x_{q_n}$.

Система отрезков $\xi_n=\{\Delta_i^{(n+1)},\; 0\le i<q_n;\;\; \Delta_j^{(n)},\; 0\le j<q_{n+1}\}$ образует разбиение окружности [6]. При этом соседние два отрезки из ξ_n пересекаются одной лишь концевой точкой.

В этом работе, мы покажем что пара функции $\left(f_n(z), g_n(z)\right)$ являются почти дробно-линейными функциями.

Рассмотрим семейство пар дробно-линейных функций вида

$$F_{a,b,m}(z)=\frac{a+(a+bm)z}{1+(1-m)z} \quad , \quad G_{a,b,m,c}(z)=\frac{-ac+(c-bm)z}{ac+(m-c)z}. \quad (1.5)$$

Это семейство играет исключительно важную роль в теории гомеоморфизмов с изломами, поскольку ренормализации $\left(f_n, g_n\right)$ таких гомеоморфизмов приближаются к семейству пар вида (1.5), в пределе при $n\to\infty$. Более точно, справедливо следующее утверждение. Пусть T_f - произвольный гомеоморфизм, поднятие функция f, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$, а число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Положим $c_n = \sigma$ для чётных n и $c_n = \dfrac{1}{\sigma}$ для нечётных, где σ -величина излома. Обозначим

$$b_n = \frac{x_{q_n + q_{n+1}} - x_0}{x_{q_n} - x_0},\ a_n = \frac{x_0 - x_{q_{n+1}}}{x_{q_n} - x_0}.$$

Теорема 1. Пусть поднятие f гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально. Тогда существует числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ зависящая только от T_f, такая, что для всех $n \geq 1$

$$\int_{-1}^{0} |f_n''(z) - F_n''(z)| dl \leq const \lambda_n,$$

$$\int_{0}^{a_n} |g_n''(z) - G_n''(z)| dl \leq const\ a_n^{-1} \lambda_n.$$

Доказательство. По определению координат z_0 и z:

$$z_0 = \frac{x - x_0}{x_{q_n} - x_0},\ \text{при } x \in \Delta_0^{(n)},\ \text{и } z = \frac{x_0 - x}{x_{q_n} - x_0},\ \text{при } x \in V_n = \Delta_0^{(n+1)} \cup \Delta_0^{(n)},.$$

Отсюда вытекает, что $z_0 = -z$. Если $x \in \Delta_0^{(n+1)}$, то

$$t_0 = \frac{x - x_{q_{n+1}}}{x_0 - x_{q_{n+1}}} = \frac{x_{q_n} - x_0}{x_0 - x_{q_{n+1}}} \cdot \frac{x - x_{q_{n+1}}}{x_{q_n} - x_0} =$$

$$= \frac{1}{a_n} \cdot \frac{x - x_0 + x_0 - x_{q_{n+1}}}{x_{q_n} - x_0} = \frac{1}{a_n}(-z + a_n)$$

Значить, если $z_0 \in [0;1]$ то $z \in [-1;0]$ и если $t_0 \in [0;1]$, то $z \in [0; a_n]$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Теперь покажем, что $f_n(z)$ и $F_n(z) = F_{a_n, b_n, m_n}(z) = \dfrac{a_n + (a_n + b_n m_n)z}{1 + (1 - m_n)z}$

отличаются от $z_{q_{n+1}}(z_0)$ и $H_{n+1}(z_0)$ лишь заменой координат $z_0 \to -z$, $z \to a_n - (a_n + b_n) z_{q_{n+1}}$:

Таким образом

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_a}} = a_n - (a_n + b_n) z_{q_{n+1}}(-z).$$

$$F_n(z) = a_n - (a_n + b_n) H_{n+1}(-z).$$

Отсюда вытекает, что $f_n(z) - F_n(z) = -(a_n + b_n) \cdot D_{n+1}(-z)$. С другой стороны

$F_n(z) = F_{a_n, b_n, m_n}(z) = \dfrac{a_n + (a_n + b_n m_n)z}{1 + (1 - m_n)z}$. Используя теорему 1 получаем

$\|D''_n(-z)\|_{L_1([0,1])} \le c_1 \lambda_n$. Из теоремы Данжуа $|a_n + b_n| \le e^v$. Учитывая это получим первое утверждение теоремы 1. Для доказательства второго неравенства теоремы 1 сравним f_n и g_{n+1}. Поскольку обе функции отвечают одному и тому же отображению, но в разных системах координат, то

$$g_{n+1}(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_{n+1}})) - p_{n+1} - x_0}{x_0 - x_{q_{n+1}}} =$$

$$= \frac{x_0 - x_{q_n}}{x_0 - x_{q_{n+1}}} \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_{n+1}})) - p_{n+1} - x_0}{x_0 - x_{q_n}} =$$

$$= -\frac{1}{a_n} \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})(-a_n)) - p_{n+1} - x_0}{x_0 - x_{q_n}} = -\frac{1}{a_n} f_n(-a_n z).$$

Используя это получаем второе утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома. //Функционал анализ и его приложения. -1998.-№32(3). с.11-21.
2. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома. // Успехи математических наук. – Москва: 2004.- т. 59. Вып. 1(355), с. 185-186.
3. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. // Ergodic Theory Dynam.Systems.-1989.- No. 9(4), p. 643-680.
4. Khanin K.M. and Vul E.V. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. –М.: Наука, 1980.
6. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Наука, 1995.