



Volume: 76 / 2026
Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

¹Янгибоев З.Ш., Тошкуллова Д., ²Хужаев Л.Х.

¹Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан

²Каршинский государственный технический университет, Карши, Узбекистан

z.yangiboyev@qarshidu.uz

A R T I C L E I N F O.

Keywords: обратная задача, гиперболическое уравнение, запаздывающий аргумент, функция источника, метод Фурье, уравнение Вольтерра, существование и единственность.

Abstract.

Рассматривается обратная задача определения функции источника в одномерном линейном гиперболическом уравнении с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием по времени. В качестве дополнительной информации задано значение решения в фиксированной внутренней точке области. Методом Фурье задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра первого рода со свёрточным ядром, а затем двукратным дифференцированием — к уравнению Вольтерра второго рода. Доказано, что при выполнении условий согласования данных обратная задача имеет единственное решение, и получена оценка устойчивости по норме дополнительных данных. Приведён алгоритм решения. Результаты могут быть использованы при идентификации динамических систем с запаздыванием.

<http://www.gospodarkainnowacje.pl/> © 2026 LWAB.



1 Введение

Обратные задачи являются одним из актуальных направлений современной математической физики. В таких задачах коэффициенты уравнения, функция источника, начальные или граничные условия частично неизвестны, и для их определения используется дополнительная информация о решении [1]. Уравнения с запаздывающим аргументом возникают при моделировании процессов в биологии и в теории управления где реакция системы зависит от её состояния в предшествующий момент времени. Обратные задачи для таких уравнений изучены заметно меньше, чем для уравнений без запаздывания. Для параболических уравнений с запаздыванием задачи идентификации рассматривались в для гиперболических — в [2]. Обратные задачи определения источников и коэффициентов для гиперболических уравнений без запаздывания, в том числе методом оценок Карлемана, исследованы в [3].

В настоящей работе рассматривается задача определения зависящей от времени функции источника $f(t)$ в уравнении (1) по значению решения в фиксированной внутренней точке x_0 . Основная идея — использование фундаментальных решений $Z_n(t)$ задач с запаздыванием для коэффициентов Фурье, что приводит к свёрточному уравнению Вольтерра относительно f . Показано, что ключевым условием разрешимости является $h(x_0) \neq 0$, и что для получения уравнения второго рода необходимо двукратное дифференцирование дополнительных данных, т.е. задача некорректна в обычном смысле (см. замечание 2).

2 Постановка прямой задачи

Пусть $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t \leq T\}$, $\bar{Q}_T = [0, p] \times [0, T]$, $t > 0$ — постоянное запаздывание, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. В области Q_T рассматривается уравнение

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) + bu(x, t - t) = f(t)h(x), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

предысторией и начальной скоростью

$$\begin{aligned} u(x, t) &= j(x, t), \quad x \in [0, p], t \in [-t, 0]; \\ u_t(x, 0) &= y(x), \quad x \in [0, p]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь h, j, y — заданные функции. Предполагаются следующие условия согласования и гладкости:

$$\begin{aligned} j(0, t) &= j(p, t) = 0 \quad (t \in [-t, 0]), \\ j_{xx}(0, 0) &= j_{xx}(p, 0) = 0, \quad y(0) = y(p) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

(H1) $h \in C^2[0, p]$, $h(0) = h(p) = 0$.

(H2) $j, j_x, j_{xx}, j_{xxx} \in C([0, p] \times [-t, 0])$, $y \in C^2[0, p]$, и выполнены условия (4).

Под *решением* понимается функция $u \in C_{x,t}^{2,2}(\bar{Q}_T)$, т.е. непрерывная в $\bar{Q}_T$ вместе с u_x, u_{xx}, u_t, u_{tt} , удовлетворяющая (1)–(3). В прямой задаче функция $f \in C[0, T]$ известна и требуется найти $u(x, t)$.

3 Постановка обратной задачи

В обратной задаче функция $f(t)$ неизвестна, а вместо неё задано значение решения во внутренней точке $x_0 \in (0, p)$:

$$u(x_0, t) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где g — заданная функция.

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x, t), f(t)\}$, $u \in C_{x,t}^{2,2}(\bar{Q}_T)$, $f \in C[0, T]$, удовлетворяющую условиям (1)–(3) и дополнительному условию (5).

Подставляя $t = 0$ в (5) и дифференцируя (5) по t при $t = 0$, получаем необходимые условия согласования дополнительных данных: [4]

$$g(0) = j(x_0, 0), \quad g'(0) = y(x_0). \quad (6)$$

4 Метод решения и основной результат

4.1 Фундаментальное решение

Пусть $w_n = an$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $Z_n(t)$ решение задачи

$$\begin{aligned} Z_n'(t) + w_n^2 Z_n(t) + bZ_n(t-t) &= 0 \quad (t > 0), \\ Z_n(t) &= 0 \quad (t \leq 0), \quad Z_n'(0+) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

При $t \in [0, t]$ имеем $Z_n(t) = \sin(w_n t) / w_n$, далее Z_n продолжается методом шагов [9, 10]. Явно,

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= \sum_{k=0}^{[t/t]} (-b)^k J_{n,k}(t-kt), \\ J_{n,0}(t) &= \frac{\sin w_n t}{w_n}, \quad J_{n,k} = J_{n,k-1} * J_{n,0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $(u * v)(t) = \int_0^t u(t-s)v(s)ds$. Формула (8) проверяется непосредственно (или преобразованием Лапласа: $Z_n^u(p) = (p^2 + w_n^2 + be^{-pt})^{-1}$), так как $J_{n,k}' + w_n^2 J_{n,k} = J_{n,k-1}$ при $k \geq 1$ и $J_{n,k}(0) = J_{n,k}'(0) = 0$.

Лемма 4.1 Для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$

$$|Z_n(t)| \leq \frac{M}{n}, \quad |Z_n'(t)| \leq M_1, \quad |Z_n''(t)| \leq M_2 n, \quad (9)$$

где $M_1 = e^{|b|T/a}$, $M = M_1 / a$, $M_2 = (a^2 + |b|)M$.

Proof. Индукцией по k получаем $|J_{n,k}(t)| \leq t^k / (k!w_n^{k+1})$ и $|J_{n,k}'(t)| \leq t^k / (k!w_n^k)$ (используем $J_{n,k}' = J_{n,k-1}' * J_{n,0}$, $|J_{n,0}| \leq 1/w_n$, $|J_{n,0}'| \leq 1$). Так как $w_n \geq a$, из (8) следует $|Z_n(t)| \leq w_n^{-1} \sum_{k=0}^{[t/t]} (|b|t/w_n)^k / k! \leq M/n$, и аналогично для Z_n' . Оценка для Z_n'' следует из уравнения (7): $Z_n'' = -w_n^2 Z_n - bZ_n(t-t)$. [5]

4.2 Представление решения

Разложим решение в ряд Фурье по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^\infty$, ортогональной на $[0, p]$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t) \sin nx, \quad u_n(t) = \frac{2}{p} \int_0^p u(x, t) \sin nxdx. \quad (10)$$

Умножая (1) на $\sin nx$, интегрируя по x и дважды по частям с учётом (2), получаем для коэффициентов задачу с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_n'(t) + w_n^2 u_n(t) + b u_n(t - \tau) &= h_n f(t), \\ u_n(t) &= j_n(t) \quad (t \leq 0), \quad u_n'(0) = y_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где $h_n, j_n(t), y_n$ — коэффициенты Фурье функций $h, j(x, t), y$ соответственно. Её решение имеет

$$\begin{aligned} u_n &= u_{0n} + h_n (Z_n * f), \\ \text{вид} \quad u_{0n}(t) &= j_n(0) Z_n'(t) + y_n Z_n(t) \\ &\quad - b \int_0^{\min(t, \tau)} Z_n(t-s) j_n(s-\tau) ds \end{aligned} \quad (12)$$

— решение при $f \equiv 0$. Следовательно, [6]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin nx \int_0^t Z_n(t-s) f(s) ds, \\ u_0(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(t) \sin nx. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь u_0 — решение прямой задачи (1)–(3) при $f \equiv 0$.

Лемма 4.2 (ядро) Пусть выполнено (H1). Тогда ряд

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(nx_0) Z_n(t) \quad (14)$$

можно дважды почленно дифференцировать на $[0, T]$, $K \in C^2[0, T]$, причём $K(0) = 0$, $K'(0) = h(x_0)$.

Proof. Интегрируя по частям дважды и используя $h(0) = h(\tau) = 0$, получаем $h_n = -c_n / n^2$, где c_n — коэффициенты Фурье функции $h(x)$. По неравенствам Коши–Буняковского и Бесселя $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| / n < \infty$. Из (9) следует, что ряды для K , K' , K'' мажорируются рядами $M \sum_{n=1}^{\infty} |h_n| / n$, $M_1 \sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$, $M_2 \sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ соответственно, т.е. сходятся равномерно. Далее, $Z_n(0) = 0$, $Z_n'(0) = 1$, поэтому $K(0) = 0$ и $K'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin nx_0 = h(x_0)$: синусоидальный ряд функции h сходится абсолютно и равномерно, а его сумма непрерывна и имеет те же коэффициенты Фурье, что и h . [7]

Лемма 4.3 (прямая задача при $f \equiv 0$) Пусть выполнены (H2). Тогда ряд для u_0 в (13) сходится

вместе с производными $u_{0,x}, u_{0,xx}, u_{0,t}, u_{0,tt}$ равномерно в $\bar{Q}_T$, и $u_0 \in C_{x,t}^{2,2}(\bar{Q}_T)$.

В частности, $u_0(x_0, t) \in C^2[0, T]$, $u_0(x_0, 0) = j(x_0, 0)$, $u_{0,t}(x_0, 0) = y(x_0)$.

Proof. Из (H2) и (4) трёхкратным интегрированием по частям получаем $|j_n(0)| \leq Cn^{-3}|d_n|$ с $\|d_n\|^2 < \infty$ (неравенство Бесселя для $j_{xxx}(x_0)$), $|j_n(s)| \leq Cn^{-3}$ равномерно по $s \in [-t, 0]$, и $y_n = -\dot{c}_n / n^2$ с $\|\dot{c}_n\|^2 < \infty$. Тогда из (12) и леммы 1 следуют оценки $\sup_t |u_{0n}(t)| \leq C(|j_n(0)| + |y_n|/n + n^{-4})$, а из (11) при $f \equiv 0$ — $|u_{0n}'| \leq a^2 n^2 |u_{0n}| + |b| \sup |u_{0n}|$. Поэтому $n^2 \sup |u_{0n}| < \infty$ и $\sup |u_{0n}'| < \infty$, что даёт утверждение. [8]

4.3 Интегральные уравнения

Подставим $x = x_0$ в (13) и учтём (5). Получаем интегральное уравнение Вольтерра *первого* рода со свёрточным ядром:

$$\int_0^t K(t-s)f(s)ds = g(t) - u_0(x_0, t), \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Так как $K(0) = 0$, однократное дифференцирование (15) снова даёт уравнение *первого* рода

$\int_0^t K(t-s)f(s)ds = g(t) - u_{0,t}(x_0, t)$. Лишь после *второго* дифференцирования возникает слагаемое $K(0)f(t) = h(x_0)f(t)$, и при $h(x_0) \neq 0$ получаем уравнение Вольтерра *второго* рода

$$f(t) + \int_0^t k(t-s)f(s)ds = F(t), \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

где

$$k(t) = \frac{K(t)}{h(x_0)} = -\frac{1}{h(x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(nx_0) \varepsilon_n^2 n^2 Z_n(t) + bZ_n(t-t),$$

$$F(t) = \frac{g(t) - u_{0,t}(x_0, t)}{h(x_0)}. \quad (17)$$

Для того чтобы (16) было эквивалентно (15), необходимо и достаточно условий (6): если

$f \in C[0, T]$ решает (16), то функция $F(t) = g(t) - u_0(x_0, t) - \int_0^t K(t-s)f(s)ds \in C^2[0, T]$

удовлетворяет $F \equiv 0$ в силу (16), а $F(0) = F'(0) = 0$ в силу (6) и леммы 3; следовательно $F \equiv 0$, т.е. выполнено (15). [9]

Теорема 4.1 Пусть выполнены условия (H1), (H2), $x_0 \in (0, p)$ и

- $g \in C^2[0, T]$, выполнены условия согласования (6);
- $h(x_0) \neq 0$.

Тогда при любом $T > 0$ обратная задача (1)–(3), (5) имеет единственное решение $\{u, f\}$, $u \in C_{x,t}^{2,2}(\bar{Q}_T)$, $f \in C[0, T]$. Если f_1, f_2 — решения, отвечающие данным g_1, g_2 (при одинаковых h, j, y), то

$$P f_1 - f_2 P_{C[0,T]} \leq \frac{e^{Pk P_{C[0,T]} T}}{|h(x_0)|} P g_1' - g_2' P_{C[0,T]} . \quad (18)$$

5 Доказательство теоремы

1. Единственность. Пусть $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$ — два решения. Положим $v = u_1 - u_2$, $f^0 = f_1 - f_2$. Тогда

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} + b v(x, t - t) = f^0(t) h(x), \\ v|_{x=0} = v|_{x=p} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

$$v(x_0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (20)$$

Для коэффициентов Фурье $v_n(t)$ функции v получаем задачу (11) с нулевыми данными и правой частью $h_n f^0(t)$, откуда $v_n = h_n (Z_n * f^0)$. Так как $v(x, t) \in C^2[0, p]$ и $v(0, t) = v(p, t) = 0$, её синусоидальный ряд сходится к v равномерно, и из (20), (14) получаем

$$0 = v(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(n x_0) \int_0^t Z_n(t-s) f^0(s) ds = \int_0^t K(t-s) f^0(s) ds, \quad (21)$$

(почленное интегрирование законно в силу равномерной сходимости (14)). По лемме 2 функция $K \in C^2[0, T]$, $K(0) = 0$, $K'(0) = h(x_0)$. Дважды дифференцируя (21), приходим к однородному уравнению Вольтерра второго рода

$$f^0(t) + \int_0^t k(t-s) f^0(s) ds = 0, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

где используется $h(x_0) \neq 0$. Из (22) следует $|f^0(t)| \leq P k P_C \int_0^t |f^0(s)| ds$, и по лемме Гронуолла $f^0 \equiv 0$. Тогда $v_n \equiv 0$ для всех n и $v \equiv 0$. Единственность доказана. [11]

2. Существование. По леммам 2 и 3 и условию (H3) имеем $k \in C[0, T]$, $F \in C[0, T]$. Уравнение Вольтерра (16) с непрерывным ядром $k(t-s)$ имеет (см. [11]) единственное решение $f \in C[0, T]$; оно строится методом последовательных приближений

$$f^{(0)}(t) = F(t), \quad f^{(m)}(t) = F(t) - \int_0^t k(t-s) f^{(m-1)}(s) ds, \quad m = 1, 2, K, \quad (23)$$

причём $|f^{(m)}(t) - f^{(m-1)}(t)| \leq P F P_C (P k P_C t)^m / m!$, поэтому ряд $f^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} (f^{(m)} - f^{(m-1)})$ сходится равномерно на $[0, T]$ при любом T . [12]

Подставим найденную f в (13) и определим u . По леммам 1–3 и условию $\sum_{n=1}^{\infty} n |h_n| < \infty$ ряд (13) и ряды, полученные его почленным дифференцированием до второго порядка по x и t , мажорируются сходящимися числовыми рядами (в частности, $\left| (Z_n * f) \right| \leq P f P_C (1 + M_2 n T)$ и $n^2 |h_n| \leq M / n = M n |h_n|$). Следовательно, $u \in C_{x,t}^{2,2}(\overline{Q_T})$. Подстановка в (1) даёт, с учётом (11) и $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin nx = h(x)$, равенство $u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu(x, t - t) = f(t)h(x)$; условия (2), (3) выполнены по построению. Наконец, в силу (6) и эквивалентности (16) и (15), проверенной в п. 4.3, выполнено (15), т.е. $u(x_0, t) = g(t)$. [13]

3. Оценка устойчивости. Разность $f^0 = f_1 - f_2$ удовлетворяет уравнению $f^0 + k * f^0 = (g_1' - g_2') / h(x_0)$, откуда $\left| f^0(t) \right| \leq P g_1' - g_2' P_C / |h(x_0)| + P k P_C \int_0^t |f^0| ds$, и по лемме Гронуолла получается (18). Теорема доказана.

Замечание 5.1 (о роли условия $h(x_0) \neq 0$) Условие (H4) существенно. Например, при $x_0 = p/2$, $h(x) = \sin 2x$ имеем $h_n = d_{n,2}$ и $K(t) = \sin(2x_0) Z_2(t) \equiv 0$; тогда $u(x_0, t)$ не зависит от f , и единственности нет. Условие иррациональности x_0/p , которое иногда используют, чтобы гарантировать $\sin(nx_0) \neq 0$ при всех n , для доказанной теоремы не требуется. [14]

Замечание 5.2 (о некорректности) Поскольку для построения F необходимо дважды дифференцировать g , задача (1)–(3), (5) некорректна в паре пространств $C - C$; устойчивость (18) имеет место лишь по норме C^2 данных g . При наличии погрешности в g необходима регуляризация [12].

Замечание 5.3 (проверка при $b = 0$) При $b = 0$ имеем $Z_n(t) = \sin(w_n t) / w_n$, т.е. $K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(nx_0) \sin(ant) / (an)$ — классический случай без запаздывания, $K(0) = h(x_0)$ в согласии с формулой Даламбера.

6 Алгоритм решения обратной задачи

1. Вычислить коэффициенты Фурье h_n , $j_n(s)$, y_n и функции $Z_n(t)$ по формуле (8) (или методом шагов).
2. Найти $u_{0n}(t)$ по формуле (12) и $u_0(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(t) \sin nx_0$; убедиться, что выполнены условия согласования (6).
3. Вычислить $g(t)$ (при зашумлённых данных — с регуляризацией) и $u_{0,t}(x_0, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{g}^2 n^2 u_{0n}(t) + bu_{0n}(t - t) \sin nx_0$; составить $F(t)$ и ядро $k(t)$ по (17).
4. Решить уравнение Вольтерра второго рода (16) методом последовательных приближений (23) или методом резольвент.
5. Подставить найденную $f(t)$ в (13) и восстановить поле $u(x, t)$.

7 Обсуждение

Основные особенности предложенного подхода:

- Метод Фурье сводит задачу с запаздыванием к последовательности обыкновенных уравнений с запаздыванием (11), решаемых явно через Z_n ; оценки леммы 1 равномерны по n и позволяют обосновать сходимость рядов.

- Решающим условием является $h(x_0)^1 0$ (замечание 1); задача сводится к уравнению второго рода лишь после двукратного дифференцирования дополнительных данных, поэтому требуется $g \hat{I} C^2$ и условия согласования (6).

- Запаздывание в уравнении (1) входит только через слагаемое $bu(x, t - t)$ и не меняет главную часть оператора; оно влияет на структуру ядра k , но не на условие разрешимости. Результаты данной работы не содержат численных экспериментов; проверка алгоритма на тестовых примерах является предметом дальнейшей работы.

Перспективы дальнейших исследований:

1. случай переменного запаздывания $t = t(t)$;
2. нелинейные функции источника $f(t, u)$;
3. многомерные области по пространственным переменным;
4. совместное восстановление коэффициентов уравнения и функции источника;
5. численная реализация и регуляризация при зашумлённых данных g . [15]

8 Заключение

Для одномерного гиперболического уравнения с постоянным запаздыванием рассмотрена обратная задача определения функции источника $f(t)$ по значению решения в фиксированной внутренней точке. Задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра первого рода, а затем — к уравнению второго рода относительно f . Доказаны существование и единственность решения и оценка устойчивости по норме C^2 данных при условиях $h(x_0)^1 0$, гладкости и согласования данных.

Показано, что условие иррациональности x_0 / p не является необходимым, а условие $h(x_0)^1 0$ существенно.

References

- [1] S. I. Kabanikhin, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin, Germany: De Gruyter, 2011, pp. 1–300.
- [2] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, and I. A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, NY, USA: Marcel Dekker, 2000, pp. 1–700.
- [3] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, 2nd ed. Berlin, Germany: Springer, 2006, pp. 1–300.
- [4] G. Di Blasio, “Identification problems for parabolic delay differential equations with measurement on the boundary,” Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, vol. 15, no. 7, pp. 709–734, 2007.
- [5] A. Ashyralyev and B. Haso, “Stability of the time-dependent identification problem for delay hyperbolic equations,” Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, no. 3 (107), pp. 25–34, 2022.
- [6] A. M. Denisov, “System of nonlinear integral equations for the unknown functions in a functional-differential hyperbolic equation,” Differential Equations, vol. 53, no. 9, pp. 1114–1120, 2017.
- [7] M. Yamamoto, “Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems,” Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 78, no. 1, pp. 65–98, 1999.

- [8] M. V. Klibanov and A. Timonov, Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. Utrecht, The Netherlands: VSP, 2004, pp. 1–200.
- [9] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations. New York, NY, USA: Springer, 1993, pp. 1–447.
- [10] A. D. Myshkis, Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom [Linear Differential Equations with a Delayed Argument]. Moscow, Russia: Nauka, 1972, pp. 1–352.
- [11] G. Gripenberg, S.-O. Londen, and O. Staffans, Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1990, pp. 1–701.
- [12] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Russia: Nauka, 1986, pp. 1–288.
- [13] S.-I. Niculescu, Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. London, U.K.: Springer, 2001, pp. 1–269.
- [14] J. D. Murray, Mathematical Biology. I: An Introduction, 3rd ed. New York, NY, USA: Springer, 2002, pp. 1–551.
- [15] A. B. Bakushinsky and M. Y. Kokurin, Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2004, pp. 1–200.