https://gospodarkainnowacje.pl GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 25 | 2022

Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБШЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Маматов Алишер Зулунович

Tashkent Institute of Textile and Light Industry, 5, Shokhjakhon str., 100100, Tashkent, Uzbekistan

Турдибоев Дилшод Хамидович

Department of Mathematics, Gulistan state University of Uzbekistan, Uzbekistan

Хамзакулов Эржигит Абдубашарович, Абдусатторов Шахзод Жавлон угли, Хурозов Исломбек Жоникул угли

ARTICLEINFO.

Ключевые слова:
Краевая задача, квазилинейное уравнение, краевое условие, метод Галеркина, обобщенное решение, параболическая задача, приближенное решение, оценка погрешности, монотонность, неравенства, производную по времени, граница, область, скалярное произведение, норма, искомая функция.

Аннотация

В Статье Рассмотрена Существования И Единственность Обобщенного Решения Задачи Одной Задачи Параболического Типа С Дивергентной Главной Частью, Когда Граничное Условие Содержит Производную По Времени От Искомой Функции.

Введение. При исследования ряда прикладных задач возникает необходимость изучения смешенных задач параболического типа, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции. Задачи такого типа возникают, например, когда однородное изотропное тело помещено в индуктор индукционной печи и на его поверхность падает электро-магнитная волна. Посторением приближенного решения по методу Галеркина и получением априорных оценок приближенного решания для параболических квазилинейных задач без производной по времени в граничном условии занимались многие ученные: Михлин С.Г., Douglas J. Jr, Dupont T. , Dench J. E., Jr, Jutchell L. и др. А квазилинейные задачи, когда краевое условие содержит производную по времени от искомой функции с применением метода Галеркина мало изучены.

Постановка задачи. Рассмотрим квазилинейную задачу параболического типа, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции[1-7]:

$$\begin{cases} U_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a(x,t,u,\nabla u) = 0\,, \\ a_0 U_t + a_i(x,t,u,\nabla u)\cos(V,x_i) = g(x,t,u), (x,t) \in S_t\,, \\ U(x,O) = U_0(x)\,, x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

$\Omega -$ ограниченная область в $E_m, a_0 = const > 0$

Предположим, что выполнены следующие условия:

А. При $(x,t,u,p) \in \{\bar{\Omega} \times [O,T] \times E_1 \times E_2\}$ функции

$a_i(x,t,u,p)$, $a(x,t,u,p)$ измеримы по (x,t,u,p), непрерывны по (t,u,p)

и удовлетворяют неравенствам

$|a_i(x,t,u,p)| \le C\left(|P| + |U|^{\frac{m}{m-2}}\right) + \varphi_1(x,t)$,

$|a(x,t,u,p)| \le C\left(|P|^{\frac{m+2}{m}} + |U|^{\frac{m+2}{m-2}}\right) + \varphi_2(x,t)$, (2)

$$\varphi_1(x,t) \in L_2(Q_T)\ , \varphi_2(x,t) \in L_{\frac{2m}{m+2}}(Q_T),$$

$$P = (P_1, p_2, .., P_m)\ , m = \dim(\Omega),$$

$|P| = (\sum_{i=1}^{m} P_i^2)^{\frac{1}{2}}$

При этом размерность области Ω $m \ge 3$. В случае $m = 2$ неравенства (2) надо заменить на

$|a_i(x,t,u,p)| \le C(|P| + |U|^k) + \varphi_1(x,t)\ , \varphi_1 \in L_2(Q_T)$,

$$|a(x,t,u,p)| \le C(|P|^{2-\epsilon} + |U|^k) + \varphi_2(x,t)\ , \varphi_2 \in L_q(Q_T),$$

где $k < \infty, \varepsilon > 0, q > 1$

Наконец: в случае ограниченных обобщений решений на $\widehat{H^{1.1}_{(Q_T)}}$ ограничения на $a_i(x,t,u,p)$ и $a(x,t,u,p)$ следующие

$|a_i(x,t,u,p)| \le \mu_1(u)\big(|P| + \varphi_1(x,t)\big)\ , \varphi_1 \in L_2(Q_T)$,

$|a(x,t,u,p)| \le \mu_2(u)\big(|P|^2 + \varphi_2(x,t)\big)\ , \varphi_2 \in L_1(Q_T),$

где $\mu_i(u) -$ непрерывные функции от u

Б. Функции $a_i(x,t,u,p)$ имеют вид:

$a_i(x,t,u,p) = \bar{a}_i(x,t,u,p) + \bar{\bar{a}}_i(x,p)$ (3)

здесь

$\bar{a}_i(x,t,u,p) = \frac{\partial \bar{a}(x,t,u,p)}{\partial P_i},$

$\left|\frac{\partial \bar{a}}{\partial t}\right| \le C(|U|^{2r} + |P|^2) + \varphi_3(x,t)\ , \varphi_3 \in L_1(Q_T))$ (4)

$\left|\frac{\partial \bar{a}}{\partial u}\right| \le C\big(|U|^r + |P| \quad\big) + \varphi_4(x,t)\ , \varphi_4 \in L_2(Q_T))$ (4)

$r \epsilon \begin{cases} [0,\infty), m = 2 \\ \left[0, \dfrac{m}{m-2}\right], m \ge 3 \end{cases}, \int_{\Omega} \bar{a}\,(x,t,u,\nabla u)dx \Big|_0^t \ge 0$

В. Условие параболичность. Для любой гладкой функции U(x,t) справедливо неравенство.

$\int_{Q_T} \bar{\bar{a}}_i\,(x,\nabla U) U_{tx_i} \mathrm{dxdt} \ge \nu \|\nabla \mathrm{U}\|^2_{\mathrm{L}_2}(\Omega)$ (5)

где ν-положительная постоянная.

Г. Условие монотонности. Для любых функций $U, V \in H^1$

$(a_i(x,t,u,\nabla u) - a_i(x,t,v,\nabla v), U_{x_i} - V_{x_i})_\Omega + (a(x,t,u,\nabla u) - a(x,t,v,\nabla v), U - V)_\Omega \geq 0$ (6)

Д. При $(x,t,u) \in \{\bar{\Omega} \times [o,T] \times E_1\}$ функция $g(x,t,u)$

непрерывна по (t,u) и удовлетворяет неравенству:

$|g(x,t,u) - g(x,t,v)| \leq g_0|u - v|, g(x,t,0) \in L_2(S_T)$. (7)

Обобщенным решением из пространства $\widetilde{\mathrm{H}^{1,1}}(Q_T) = \{U \in \widetilde{\mathrm{H}^{1,1}}(Q_T): a_0 U_t \in L_2(S_T)\}$ задача (1) назовем функцию из $\widetilde{\mathrm{H}^{1,1}}(Q_T)$. удовлетворяющую тождеству

$\int_{Q_T}(U_t\eta + a_i(x,t,u,\nabla u)\eta_{xi} + a(x,t,u,\nabla u)\eta)\, dxdt + \int_{S_T}(a_0 u_t + g(x,t,u))\quad)\eta)\, dxdt = 0$ (8)

Построим приближенное решение по Галеркину [8-11]. Возьмем координатную систему из пространства H^1. Приближенное решение U(x,t) будем искать в виде

$U(x,t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^n\,(t)\varphi_k(x)$ (9)

где $C_k^n(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$(U_t, \varphi_j)_{\hat{L}_2} + (a_i(x,t,U,\nabla U), \varphi_{jx_i})_\Omega + (a(x,t,U,\nabla U), \varphi_j)_\Omega =$

$= (g(x,t,U), \varphi_j)_S\,, j = \overline{1,n}$ (10)

И начальных условий

$$(U(x,O) - u_0, \varphi_j)_{H^1(\Omega)} = 0$$

Здесь $\hat{L}_2(\Omega)$ – пространство функции со скалярным произведением

$(u,v)_{\hat{L}_2} = (u,v)_\Omega + a_0(u,v)_s$

Если система $\{\varphi_k\}$ ортонормированна в метрике$\hat{L}_2(\Omega)$, то система (10) принимает вид

$\dot{C}_i^n = f_j^n(t, C_1^n, .., C_n^n)$, (11)

где $f_j^n(t, C_1^2, .., C_n^n) = -(a_i(x,t,U,\nabla U), \varphi_{jx_i})_\Omega - (a(x,t,U,\nabla U), \varphi_j)_\Omega + (g(x,t,U), \varphi_j)_S$

Условие A обеспечивает существование и непрерывность функции

$f_j^n(t, C_1^n, .., C_n^n)$ по t и C_k^n. Поэтому для существования, по крайней мере одного решения задачи (11) на всем интервале [O,T] достаточно знать все возможные решения равномерно ограничены. Такая ограниченность следует из априорной оценки [12-16]:

$\max\limits_{0 \leq t \leq T} \|U(x,t)\|^2_{\hat{L}_2} + \|U_t(x,t)\|^2_{L_{2(o,T,\hat{L}_2)}} + \max\limits_{0 \leq t \leq T} \|\nabla U(x,t)\|^2_{\hat{L}_2} \leq N$ (12)

где N-постоянная, не зависящая от n.

Литература

1. Kacur J. Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions// Math Slovoca, 1980, 30, N3, p 213-237
2. Kacur J. Nonlinear parabolic boundary valve problems with the time derivative in the boundary conditions// Lect Notes Math, 1979, 703, p. 170-178.

3. Митропольский Ю.А., Нижных Л.П., Кульчицкий В.Л. Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии. –Препринт ИМ -74-15. Киев.-1974.-32с.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.-Наука,-1966.-432 С.
5. Douglas J Jr, Dupont T. Galerkin methods for parabolic equations with nonlinear foundry conditions// NumerMalh.- 1973, 20, p. 213-237
6. Маматов А.З. Применения метода Галеркина к некоторому квазилинейному уравнению параболического типа// Вестник ЛГУ,-1981.-№13.-С.37-45.
7. Маматов А.З., Досанов М.С., Рахманов Ж., Турдибаев Д.Х. Одна задача параболического типа с дивергентной главной частью// НАУ (Национальная ассоциация ученых). Ежемес. научный журнал, 2020, №57, 1-часть, С.59-63.
8. Mamatov, A., Bakhramov, S., Narmamatov, A. An approximate solution by the Galerkin method of a quasilinear equation with a boundary condition containing the time derivative of the unknown function. AIP Conference Proceedingsthis link is disabled, 2021, 2365, 070003
9. Mamatov, A.Z., Narjigitov X., Rakhmanov *J.*, Turdibayev *D.* Refining the Galerkin method error estimation for parabolic type problem with a boundary condition E3S Web of Conferences **304**, 03019 (2021) *ICECAE 2021* https://doi.org/10.1051/e3sconf/202130403019
10. Mamatov, A.Z., Narjigitov X., Kengash, J ., Rakhmanov *J.*, Stability of the Galerkin Method for one Quasilinear Parabolic Type Problem// CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES 2 (6), 6-12, 2021
11. Mamatov, A.Z., Rakhmanov *J.*, Mamatov J. S**.** Obtaining a Priori Error Estimate An Approximate Solution for a Parabolic Type Problem with a Divergent Principal Part// International Journal of Modern Agriculture, Volume 10, No.2,
12. Mamatov, A., Bakhramov, S., Narmamatov, A. An approximate solution by the Galerkin method of a quasilinear equation with a boundary condition containing the time derivative of the unknown function. AIP Conference Proceedingsthis link is disabled, 2021, 2365, 070003
13. Mamatov, A.Z., Usmankulov, A.K., Abbazov, I.Z., Norboyev, U.A., Mukhametshina, E.T. Determination of Temperature of Components of Cotton-Raw Material in a Drum Dryer with a Constant. IOP Conference Series: Earth and Environmental Sciencethis link is disabled, 2021, 939(1), 012052
14. Mamatov, A.Z., Pardaev, X.N., Mardonov, J.S.H., Plekhanov, A.F. Determining of the heat-moisture stateof raw cotton in a drum dryer. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennostithis link is disabled, 2021, 391(1), C. 46–49
15. Mamatov A., Parpiyev A., Kayumov A., Mathematical models of the heat and mass exchange process during pneumo-transportation of cotton-raw// International Scientific Journal Theoretical & Applied Science , p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online) , Year: 2020 Issue: 11 ,Volume: 91 P.508-513.
16. Маматов А.З., Джумабаев Г. Об устойчивости приближенного решения одной задаче определения тепло-влажного состояния хлопка-сырца // Ж. Проблемы текстиля. 2010.-№2, С.86-90